3.1 DISTANCIAS EN EL ESPACIO

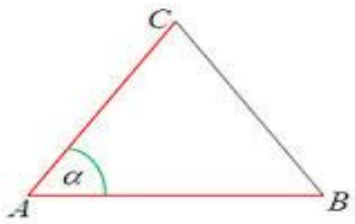
3.1.1 Distancia entre dos puntos

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ del espacio, se define la *distancia* entre ellos como el módulo del vector que determinan:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $d(A,B) = d(B,A)$.
2. $d(A,B) \geq 0$. Únicamente es cero cuando $A = B$.
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$. Se da la igualdad si y sólo si los puntos están alineados.



EJERCICIOS ____

Ejercicio 3.1 Sean los puntos $A(3,0,3)$ y $B(1,-1,0)$. Comprueba que $d(A,B) = d(B,A)$.

Ejercicio 3.2 Halla las coordenadas de un punto P del eje OY tal que su distancia al punto $A(2,3,4)$ es igual a 6 unidades de longitud.

Ejercicio 3.3 Determina un punto de la recta $(x,y,z) = (2-\lambda, 3-\lambda, 2+\lambda)$ cuya distancia a un punto $P(0,2,-1)$ sea $\sqrt{41}$.

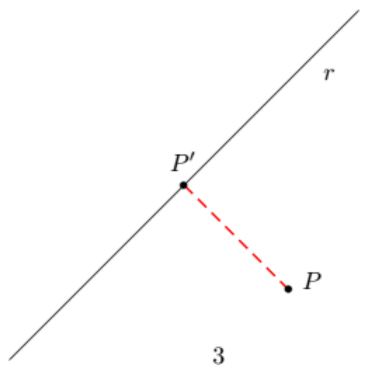
Ejercicio 3.4 Halla un punto de la recta $(x,y,z) = (2-\lambda, 3-\lambda, 1+3\lambda)$ que equidista de los puntos $A(0,-1,2)$ y $B(1,2,0)$.

Ejercicio 3.5 Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.

____

3.1.2 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta se define como la menor de las distancias del punto a los puntos de la recta. Esta distancia coincide con la longitud del segmento perpendicular que une el punto con la recta.

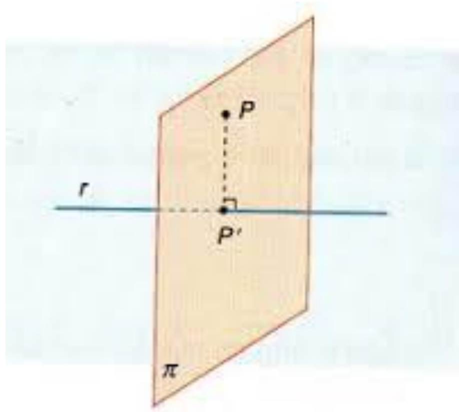


Si P' es el punto proyección del punto P sobre la recta r, la distancia del punto P a la recta r coincide con la distancia entre los puntos P y P':

$$d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}|.$$

Esto nos proporciona una idea del cálculo de la distancia de un punto a una recta. Podemos calcular el segmento perpendicular a la recta r que pasa por el punto P y determinar su longitud.

Método constructivo



a) Hallamos el plano perpendicular π a la recta r que pasa por el punto P.

b) Hallamos el punto de corte de ese plano con la recta r.

c) Este punto de corte es el punto P' que materializa la distancia del punto P a la recta r.

EJERCICIOS

Ejercicio 3.6 Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x + z - 2 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

b) Calcula la distancia de P a r.

Método del punto genérico

Otra posibilidad es tomar un punto genérico de la recta r, dada la misma por sus ecuaciones paramétricas e imponer que el vector formado por ese punto y el punto que nos dan sean ortogonales. Obtendríamos de esta forma el punto P' que materializa la distancia del punto P a la recta r.

EJERCICIOS

Ejercicio 3.7 Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta r dada por

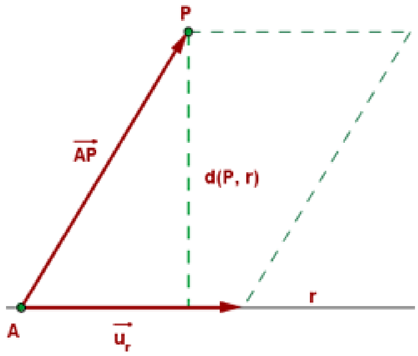
$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 - t, \\ z = t. \end{cases}$$

Calcula la distancia de P a r mediante el método del punto genérico.

Método del producto vectorial

Este método se basa en la relación que existe entre el módulo del producto vectorial y el área del paralelogramo. Si la recta r tiene dirección $\vec{u}_r$, la distancia de un punto P a la recta r puede obtenerse como:

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}.$$



EJERCICIOS

Ejercicio 3.8 Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta

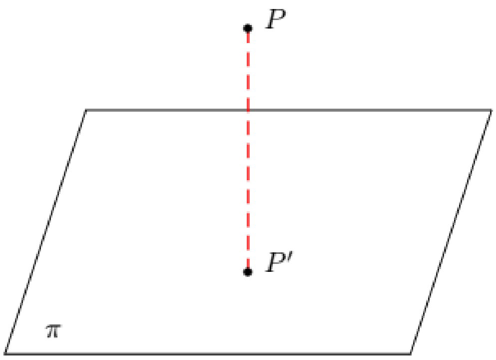
$$r \equiv \begin{cases} x+z-2=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$$

Mediante el método del producto vectorial, calcula la distancia de P a r.

3.1.3 Distancia de un punto a un plano

De forma análoga a la distancia de un punto a una recta, la distancia de un punto P a un plano π se define como la menor de las distancias del punto P a los puntos del plano. Esta distancia coincide con la distancia del punto P a su proyección sobre el plano, P':

$$d(P,\pi) = d(P,P')$$

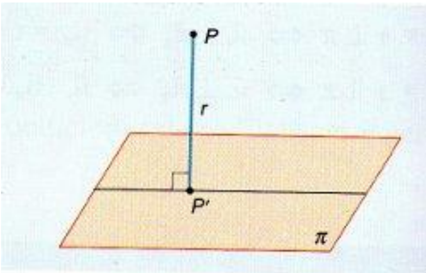


Método constructivo.

a) Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Hallamos el punto de corte de esta recta con el plano π.

c) Este punto de corte es el punto P' que materializa la distancia del punto P al plano π.



Método analítico

Sea el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y el plano π de ecuación general $ax+by+cz+d=0$. La distancia del punto al plano puede calcularse usando la fórmula:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 3.9 Considera el $P(-3,1,6)$ y el plano π definido por $2x+3y-2z+2=0$. Calcula la distancia del punto P al plano π usando dos métodos distintos.

Ejercicio 3.10 Halla la proyección ortogonal del origen de coordenadas sobre el plano de ecuación general $x+2y+3z-4=0$. Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano.

Ejercicio 3.11 Halla un punto P del eje OY que equidiste del punto $A(1,1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ y del plano de ecuación $x+y+\sqrt{2}z=0$.

Ejercicio 3.12 Considera los planos π_1 y π_2 definidos, respectivamente, por las ecuaciones:

$$(x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1), \qquad 2x+y-z+5=0.$$

Determina los puntos de la recta r definida por $x=y=\frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2.

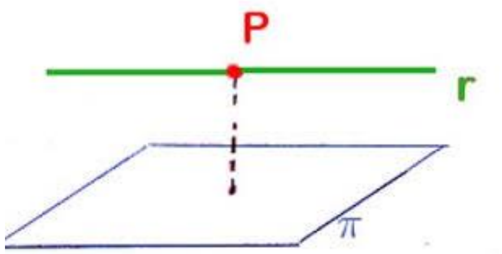
Ejercicio 3.13 Determina la ecuación de un plano que contiene a la recta

$$r\equiv\begin{cases} x-3z-2=0, \\ y+z-3=0, \end{cases}$$

y que está a 1 unidad de longitud del punto $P(1,1,1)$.

3.1.4 Distancia entre una recta y un plano

Si la recta r corta al plano π esta distancia es cero. En caso contrario, si la recta es paralela al plano, la distancia de la recta r al plano π se calcula como la distancia de cualquier punto P de la recta a este plano. Esta distancia se puede calcular aplicando la fórmula anterior:



$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

donde el punto P tiene coordenadas $P(x_0,y_0,z_0)$ y el plano π tiene ecuación $ax+by+cz+d=0$.

EJERCICIOS ____

Ejercicio 3.14 Calcula la distancia entre la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z+3}{2}$ y el plano de ecuación general $\pi\equiv x+2y+4z=13$.

Ejercicio 3.15 Comprueba que el plano $2x-3y+5=0$ es paralelo al eje OZ. Halla la distancia de este eje al plano.

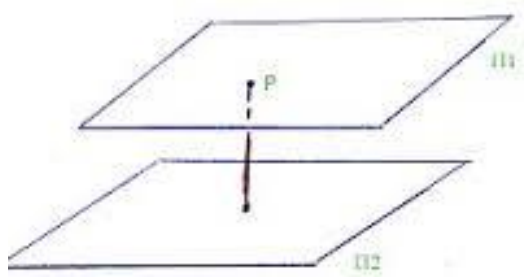
Ejercicio 3.16 Halla el valor de m para que la recta

$$r\equiv\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0, \end{cases}$$

sea paralela al plano $\pi\equiv 2x-y+mz-2=0$. Para el valor de m obtenido, calcular la distancia entre r y π.

3.1.5 Distancia entre dos planos

De forma análoga a la distancia entre una recta y un plano, podemos decir que la distancia entre dos planos sólo es no nula en el caso en que sean paralelos. Tomando cualquier punto de uno de los planos, calculamos la distancia entre este punto y el otro plano. Esta es la distancia entre los dos planos.



EJERCICIOS

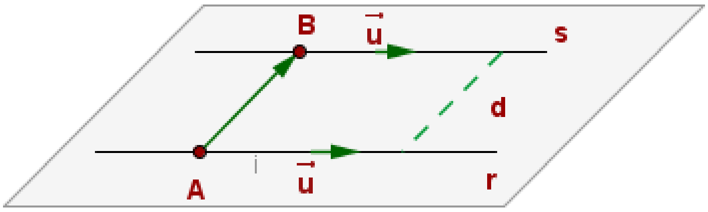
Ejercicio 3.17 Calcula la distancia entre los planos $2x-3y+z-8=0$ y $2x-3y+z+12=0$.

3.1.6 Distancia entre dos rectas

Para estudiar la distancia entre dos rectas r y s, podemos distinguir varios casos:

Caso 1. Si las rectas se cortan o coinciden, la distancia entre ellas es cero.

Caso 2. Si las rectas son paralelas, la distancia entre ellas coincide con la distancia entre un punto de una de ellas y la otra recta.



EJERCICIOS

Ejercicio 3.18 Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$, y sea s la recta dada por $\begin{cases}-2x+y=-2\\ -ax+z=0\end{cases}$.

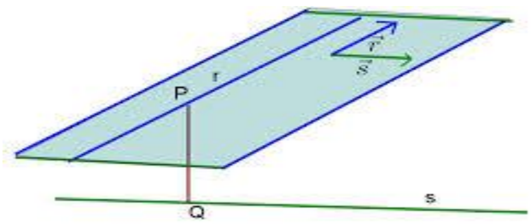
a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
b) Calcula, para $a=1$, la distancia entre r y s.

Caso 3. El caso más interesante es cuando las rectas se cruzan. Existen diversos métodos para hallar esta distancia:

Método constructivo

Sean r y s dos rectas que se cruzan. Sea π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s. Entonces, si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son dos vectores directores de r y s, respectivamente, el vector $\vec{n}=\vec{v}_r\times\vec{v}_s$ es normal al plano π_r. Este hecho nos proporciona un método constructivo para determinar la distancia entre dos restas que se cruzan:

a) Calculamos el plano π_r que contiene a r y es paralelo a s (elegimos para ello un punto P de r y consideramos el vector normal $\vec{n}=\vec{v}_r\times\vec{v}_s$).
b) Elegimos un punto Q de s y calculamos la distancia del punto Q al plano π_r.



EJERCICIOS

Ejercicio 3.19 Sea r la recta dada por la ecuación $\frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$

y sea s la recta dada por

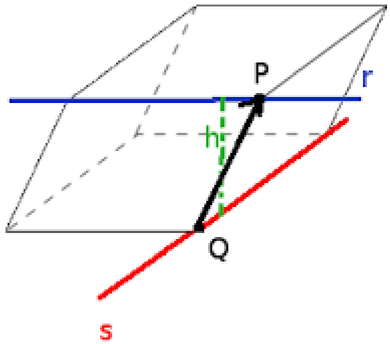
$$\begin{cases}x-y-3=0,\\ 3y-z+6=0.\end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) Halla la distancia entre r y s.

Método del vector variable

Consideramos puntos genéricos P y Q de ambas rectas, para lo cual es conveniente tener las ecuaciones paramétricas de ambas rectas. Se halla el vector $\overrightarrow{PQ}$ e imponemos las condiciones de que este vector sea ortogonal a las dos rectas. Obtenemos así dos ecuaciones con dos incógnitas cuya resolución nos dará los puntos que materializan la distancia entre ambas rectas.



EJERCICIOS

Ejercicio 3.20 Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \qquad s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s.
b) Calcula la distancia entre r y s mediante el método del vector variable.

Método del producto mixto

Se basa en la relación existente entre el producto mixto y el volumen del paralelepípedo. Tomando Un punto P y un vector director $\vec{v}_r$ de r, y un punto Q y un vector director $\vec{v}_s$ de s, la distancia entre las rectas r y s viene dada por:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 3.21 Considera las rectas r y s dedinidas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

Calcula la distancia entre r y s mediante el método del producto mixto.

3.2 Ángulos

Recordemos que el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede expresarse como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$. Despejando, obtenemos que el ángulo α que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ satisface:

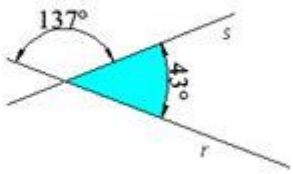
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Así, con ayuda de la calculadora científica, podemos determinar la medida del ángulo α:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) \in [0,180°].$$

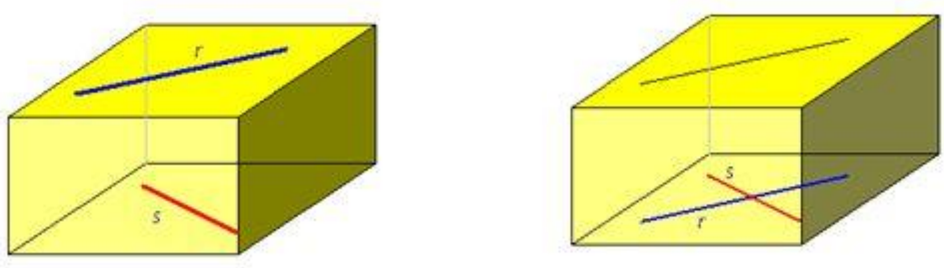
3.2.1 Ángulo entre dos rectas

Dos rectas que se cortan en un plano determinan 4 ángulos. Los opuestos por el vértice son iguales, por eso decimos, que son iguales dos a dos.

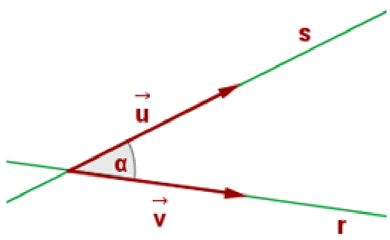


¿Cuál de los dos valores de estos ángulos es el que vale? Por convenio, se determinó que fuese el menor. Por ejemplo, el ángulo formado por las restas secantes r y s de la figura vale $43°$.

Para hallar el ángulo que forman las rectas r y s no hay más que trazar en el plano de la base una paralela a la recta r.



Nos encontramos en el caso anterior. El ángulo que forman las rectas r y s se determina a partir del *ángulo que forman sus vectores directores*. Tenemos, por tanto, que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores de r y s, el ángulo α agudo ($0 \leq \alpha \leq 90°$) que forman estas rectas satisface:



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

El valor absoluto del numerador nos asegura que estamos tomando el menor de los dos ángulos posibles que forman las dos rectas. Nótese que esta definición es independiente de la elección de los vectores directores.

Por otro lado, de la expresión anterior deducimos de forma inmediata dos condiciones equivalentes de paralelismo y perpendicularidad entre rectas:

- Dos rectas r y s son *paralelas*, si y sólo si, el ángulo α que forman es $\alpha = 0$.
- Dos rectas r y s son *perpendiculares*, si y sólo si, el ángulo que forman es $\alpha = 90°$.

EJERCICIOS ____

Ejercicio 3.22 Considera las rectas r y s dedinidas por

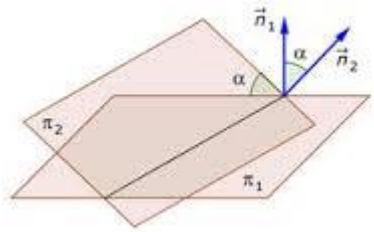
$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = 3+2\lambda, \\ z = 5-\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-2y+9=0 \\ y-z-6=0 \end{cases}$$

Calcula el ángulo que forman r y s.

3.2.2 Ángulo entre dos planos

De forma análoga al caso anterior, el ángulo que forman dos planos π_1 y π_2 se define como el ángulo que forman sus vectores normales:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$



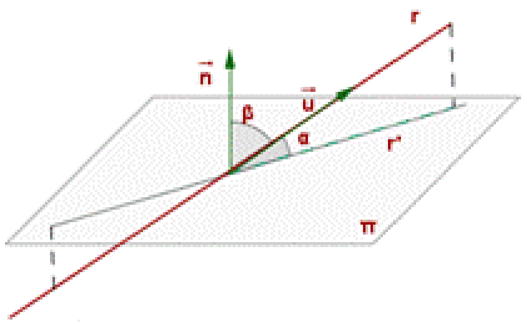
EJERCICIOS ___

Ejercicio 3.23 Calcula el valor de m para que los planos $4x - 3y + 5z + 7 = 0$, $x - my + z + 1 = 0$ sean perpendiculares.

___

3.2.3 Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo α que determina una recta r con un plano π coincide con el que forma la recta r con su proyección r'sobre el plano. Este ángulo es complementario con el ángulo β que forma la recta r con la recta normal al plano. Denotando por $\vec{u}$ al vector director de la recta r y por $\vec{n}$ al vector normal al plano π, si α es el ángulo que forman la recta y el plano, se cumple que:



$$\cos\beta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}, \quad \alpha = 90° - \beta.$$

EJERCICIOS ___

Ejercicio 3.24 Calcula el ángulo que forma la recta $-x = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{2}$ y el plano $x - y + z + 3 = 0$.

___

3.3 Lugares geométricos

Un *lugar geométrico* del espacio es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$que cumple ciertas propiedades geométricas. Estudiamos algunos lugares geométricos sencillos.

EJERCICIOS ___

Ejercicio 3.25 [Plano mediador] Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(3,4,-1)$ y $B(2,-3,5)$.

Ejercicio 3.26 [Planos bisectores] Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los planos $x = 0$ y $z = 0$.

Ejercicio 3.27 Halla el lugar geométrico de los puntos que determinan con $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$ un tetraedro de volumen $\frac{1}{6}$.

Ejercicio 3.28 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan una unidad del origen de coordenadas.

Ejercicio 3.29 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan del eje OZ dos unidades.

Ejercicio 3.30 ¿Qué ecuación satisface el lugar geométrico de los puntos del espacio tal que las rectas trazadas desde el origen de coordenadas forman un ángulo de 45° con el eje 0Z?
