IES Zaframagón
www.ieszaframagon.com

MATEMÁTICASII

Curso académico 2015-2016

BLOQUE GEOMETRÍA. TEMA 1: VECTORES

1.1 VECTORES DEL ESPACIO.

VECTORES LIBRES DEL ESPACIO

Sean A y B dos puntos del espacio. Llamaremos ***vector (fijo)*** a un segmento orientado de extremos A y B. Simbolizaremos por $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado de origen A y extremo B.

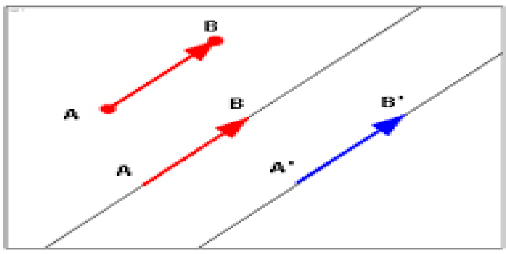
Tres son las características de un vector $\overrightarrow{AB}$:

Módulo o longitud: es la distancia $|\overrightarrow{AB}|$ entre los puntos A y B.
Dirección: es la recta que contiene a los puntos A y B, o cualquier otra recta paralela a ella.
Sentido: es el sentido del segmento del origen A al extremo B.

Dos vectores $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{AB}$ son ***equipolentes*** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. En este caso, representaremos por el mismo símbolo $\vec{v}$ a todos los vectores equipolentes entre sí:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \cdots$$

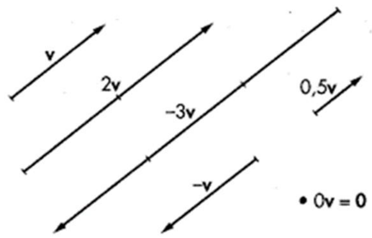
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ pueden interpretarse como dos localizaciones distintas del vector libre $\vec{v}$, una con origen A y otra con origen A' .



El vector $\vec{0}$ es aquel en el que coincide origen y extremo. Por supuesto, no tiene dirección, y su módulo es cero.

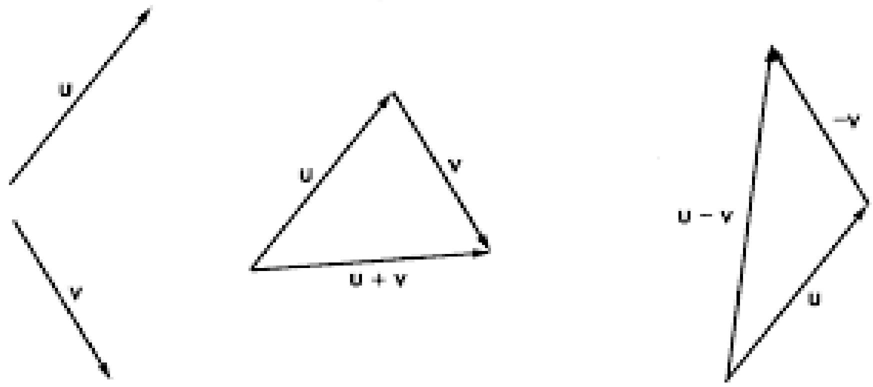
Multiplicación de un vector libre por un escalar: si multiplicamos un número real λ por un vector $\vec{v}$ obtenemos un nuevo vector $\lambda\vec{v}$, con las siguientes características:

a) El módulo de es $|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$, donde $|\lambda|$ denota el valor absoluto de λ.
b) La dirección de $\lambda\vec{v}$ es la misma que la de $\vec{v}$.
c) El sentido de $\lambda\vec{v}$ es el mismo sentido de $\vec{v}$ si $\lambda > 0$, y el sentido opuesto de $\vec{v}$ si $\lambda < 0$.



Al multiplicar 0 por $\vec{v}$ obtenemos el vector $\vec{0}$.

Suma de vectores. La suma de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ que podemos obtener gráficamente como la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



EJERCICIOS ____

Ejercicio 1.1 Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de distinta dirección traza los vectores: $2\vec{v}$, $-2\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}-\vec{w}$ y $2\vec{v}-3\vec{w}$.

____

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES. INDEPENDENCIA LINEAL.

Una ***combinación lineal*** *de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ es una expresión del tipo:

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n,$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \epsilon \mathbb{R}$ son números reales llamados *coeficientes de la combinación lineal*.

Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es ***linealmente dependiente*** si entre ellos hay alguno que es combinación lineal de los demás. Por el contrario, un conjunto de vectores es ***linealmente independiente*** si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

EJERCICIOS____

Ejercicio 1.2 Probar que dos vectores de la misma dirección son linealmente dependientes.

____

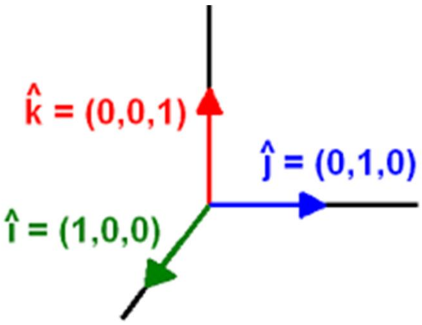
Observaciones.

1) Es claro que tres vectores del espacio $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ linealmente dependientes son ***coplanarios***, es decir, están contenidos en el mismo plano.
2) Tres vectores del espacio $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ linealmente independientes no pueden estar contenidos en el mismo plano.
3) Una ***base del espacio*** es un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ linealmente independiente.
4) Dada una base $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ del espacio cualquier otro vector $\vec{v}$ puede expresarse, de forma única, como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2\ y\ \vec{u}_3$:
$$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3,$$
para ciertos coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, denominados ***coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base B.***

5) La ***base usual*** del espacio $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ está constituida por tres vectores perpendiculares entre sí, de idéntica longitud igual a la unidad. Por tanto, cualquier vector del espacio $\vec{v}$ puede expresarse como

$$\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k} = (v_1, v_2, v_3),$$

siendo $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ las coordenadas de $\vec{v}$ en la base usual. Salvo mención explícita de lo contario, *supondremos que todos los vectores del espacio están referidos a la base usual* $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.



6) Todas las operaciones realizadas de forma gráfica con vectores pueden realizarse también numéricamente con sus coordenadas. Así, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producto de un vector por un escalar y la suma de vectores vienen dados, respectivamente, por:

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3),\ \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3).$$

EJERCICIOS ____

Ejercicio 1.3 Sean los vectores $\vec{u} = (1,3,1)$, $\vec{v} = (3,0,-3)$, $\vec{w} = (0,1,2)$ y $\vec{t} = (-4,0,0)$. Expresa el vector $\vec{t}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

____

CRITERIO DE DEPENDENCIA LINEAL

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

- $\vec{u}, \vec{v}$ son dependientes $\Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección $\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} < 1.$
- $\vec{u}, \vec{v}$ son independientes $\Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección $\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2.$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son dependientes $\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son independientes $\Leftrightarrow rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

EJERCICIOS ____

Ejercicio 1.4 Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes.

a) $\{(1,1,0), (2,0,1), (3,1,0)\}$.
b) $\{(1,1,1), (2,0,-2), (3,-3,0), (0,-2,-4)\}$.
c) $\{(7,1,0), (0,0,0), (-3,1,2)\}$.
d) $\{(7,1,0), (-3,1,2)\}$.

Ejercicio 1.5 Determinar si los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (4,5,6)$ y $\vec{w} = (7,8,9)$ son linealmente dependientes y, si lo son, hallar una combinación lineal de ellos que dé el vector $\vec{0}$.

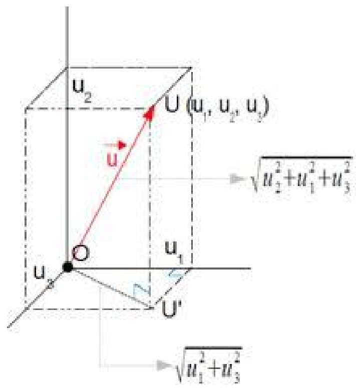
Ejercicio 1.6 Sean los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$, donde a es un número real.

a) Determina los valores de a para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.
b) Cuando $a = 2$, expresar el vector $\vec{t} = (3,3,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

1.2 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Fijada la base usual $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, se llama ***producto escalar*** de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ al número real:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 .$$



Es claro que todo vector no nulo $\vec{u} \neq \vec{0}$ satisface que $\vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$.
Del teorema de Pitágoras se desprende que el módulo $|\vec{u}|$ del vector $\vec{u}$ es:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Aplicando el conocido teorema del coseno obtenemos la siguiente formulación equivalente del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha,$$

siendo $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 180°$, el ángulo que forman los vectores $\vec{u}, \vec{v}$. En particular, si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $90°$, tenemos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 90° = 0.$$

Por tanto, los vectores ***$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares*** si y sólo si $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$.

Un ***vector unitario*** es un vector de módulo 1. El vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ es:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2.}}(u_1, u_2, u_3).$$

EJERCICIOS ______________________________

Ejercicio 1.7

a) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, -1,3)$ y $\vec{v} = (0,4,2)$. *[Indicación: puedes usar la calculadora científica].*

b) Halla un vector perpendicular común a $\vec{u} = (3,1,2)$ y $\vec{v} = (5, -6,1)$.

Ejercicio 1.8 Determina un vector $\vec{t}$ combinación lineal de $\vec{u} = (1, -1,2)$ y $\vec{v} = (2, -2,3)$ que sea además ortogonal a $\vec{w} = (3,5, -1)$.
Ejercicio 1.9 Dados $\vec{u} = (a, 6, -8)$ y $\vec{v} = (3, b, -12)$. Halla a y b sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores perpendiculares y el módulo de $\vec{u}$ es 10.
Ejercicio 1.10 Dados los vectores $\vec{u} = (-2,2,1)$, $\vec{v} = (a, 1,4)$ y $\vec{w} = (-3, b, 1)$, calcula:
(a) El valor de a y b sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$.
(b) El ángulo que forma $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

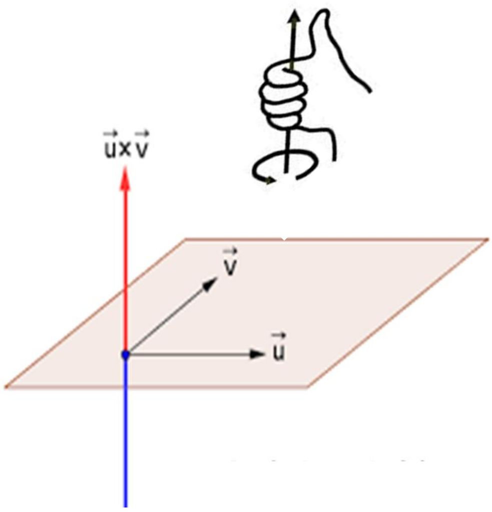
1.3 PRODUCTO VECTORIAL

Se llama ***producto vectorial*** de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ al vector calculado según la regla nemotécnica:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

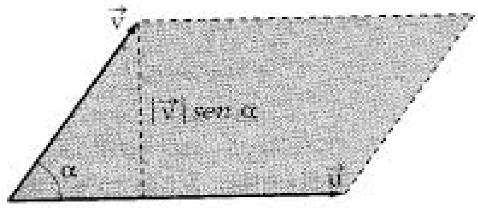
PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

a) La *dirección* de $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a la de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.
b) El *sentido* de $\vec{u} \times \vec{v}$ está determinado por el sentido del avance de un sacacorchos cuando $\vec{u}$ gira hacia $\vec{v}$ por el camino más corto.
c) El *módulo* $\vec{u} \times \vec{v}$ está dado por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}, \vec{v}$.
d) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
e) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.



Interpretación geométrica del producto vectorial

El módulo $|\vec{u} \times \vec{v}|$ coincide con el *área del paralelogramo* que tiene por lados los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



Área del paralelogramo sombreado: $|\vec{u} \times \vec{v}|$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.11 Halla un vector de módulo 7 perpendicular a $\vec{u} = (1,0,2)$ y $\vec{v} = (-1,1,1)$.
Ejercicio 1.12 Hallar el área del paralelogramo de lados $\vec{u} = (1,3,0)$ y $\vec{v} = (2,1,1)$.

1.4 PRODUCTO MIXTO

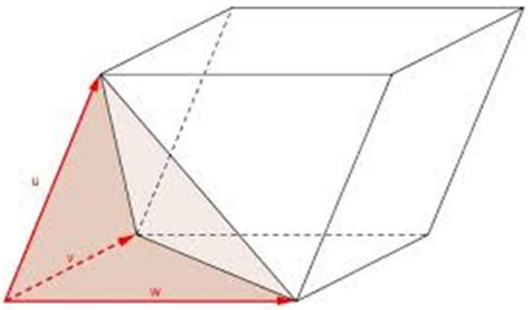
El ***producto mixto*** de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ (en el mismo orden) es el número real:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Interpretación geométrica.

El valor absoluto del producto mixto coincide con el *volumen del paralelepípedo* de aristas que tiene por lados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$Vol_{paralelepipedo} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$



Así, el *volumen del tetraedro* de aristas $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es:

$$Vol_{tetraedro} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.13 Halla el volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{u} = (-2,1,-1)$, $\vec{v} = (1,3,0)$ y $\vec{w} = (2,1,1)$.

Ejercicio 1.14 Halla un vector $\vec{w}$ que sea ortogonal $\vec{u} = (1,3,-2)$ y $\vec{v} = (1,0,-1)$ de forma que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -12$.

Ejercicio 1.15 Halla el valor de m para que los vectores $(-m, 0,0), (0, -m, 0)$ y $(0,0, -m)$ sean las aristas de un paralelepípedo de volumen 8 unidades cúbicas.