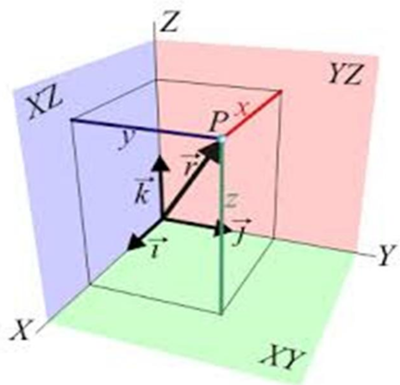
2.1 SISTEMA DE REFERENCIA. COORDENADAS DE UN PUNTO

Elegimos un punto O del espacio que llamamos origen de coordenadas. Dado un punto arbitrario P, el ***vector posición*** del punto P es el vector $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$.

El vector $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ puede escribirse como combinación lineal de una base usual $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ del espacio:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}= x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}=(x,y,z).$$

A los coeficientes (x,y,z) de esta combinación lineal se les llama ***coordenadas cartesianas*** del punto P y se representan por $P(x,y,z)$. Simbolizaremos al conjunto de todos los puntos del espacio por $\mathbb{R}^3$.

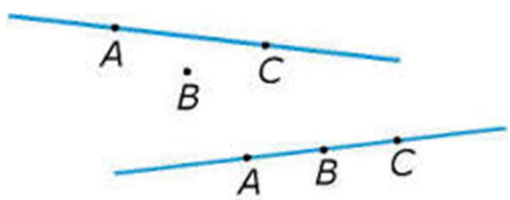


Dado un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ del espacio, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AP}$ son:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

PUNTOS ALINEADOS Y COPLANARIOS

Un conjunto de puntos en el espacio ***está alineado*** si todos los puntos están contenidos en la misma recta. Dos puntos distintos siempre están alineados.



Dados tres puntos distintos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ y $C(x_2,y_2,z_2)$ del espacio, entonces:

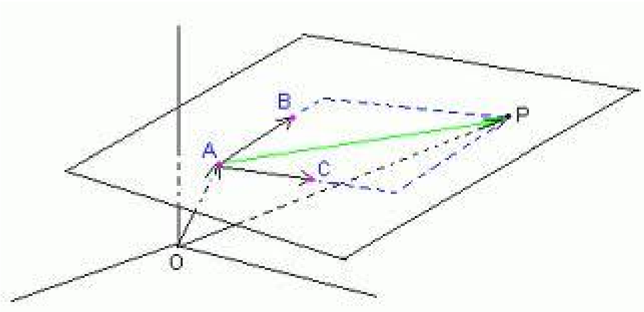
- El conjunto de puntos $\{A,B,C\}$ ***está alineado*** si, y sólo si, los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes, es decir, se verifica:

$$rango\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=rango\begin{pmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0\end{pmatrix}=1.$$

- El conjunto de puntos $\{A,B,C\}$ ***no está alineado*** si, y sólo si, los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes o, equivalentemente:

$$rango\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=rango\begin{pmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0\end{pmatrix}=2.$$

Un conjunto de puntos en el espacio es ***coplanario*** si todos los puntos se encuentran en el mismo plano. Tres puntos distintos siempre son coplanarios, pero un cuarto punto añadido en el espacio puede no pertenecer al mismo plano, siendo entonces ***no coplanario*** respecto de los anteriores.



Cuatro puntos $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ y $D(x_3, y_3, z_3)$ del espacio satisfacen:

- El conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ ***es coplanario*** si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, es decir, se verifica:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

.

- El conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ ***no es coplanario*** si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 2.1 Halla el valor de x para que los puntos $A(5,2,3)$, $B(0,7,2)$ y $C(x, 5,2)$ sean los vértices de un triángulo rectángulo en C.

Ejercicio 2.2 Dados los puntos $A(1, -3,2)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,1, -1)$, ¿pueden ser los vértices consecutivos de un triángulo rectángulo? Halla las coordenadas de un punto *D* para que el paralelogramo *ABCD* sea un rectángulo.

Ejercicio 2.3 Considera los puntos $A(0,5,3), B(-1,4,3), C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.
b) Calcula el área de dicho rectángulo.

Ejercicio 2.4 Sean los puntos $A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0)$ y $D(2,1, m)$.

a) Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.
b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

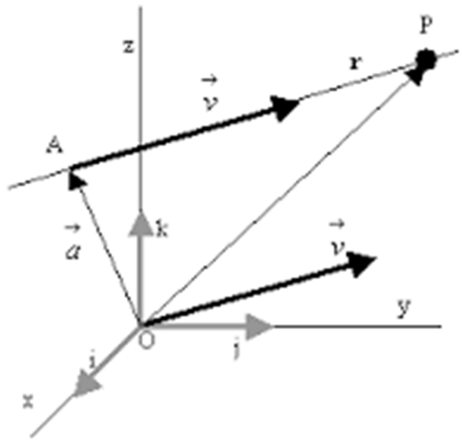
2.2 ECUACIONES DE UNA RECTA Y DE UN PLANO EN EL ESPACIO

2.2.1 ECUACIONES DE UNA RECTA

Sea r la recta que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y tiene ***vector de dirección*** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0}$.
Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la recta r. Entonces, podemos escribir:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\, \vec{v},$$

para cierto valor del parámetro λ real.



En coordenadas, tenemos la ***ecuación vectorial:***

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3).$$

Igualando cada componente llegamos a las ***ecuaciones paramétricas***:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Si despejamos el parámetro λ obtenemos la ***ecuación en forma continua:***

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Desarrollando dos de estas tres igualdades obtenemos las ***ecuaciones implícitas:***

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que, al ser los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{v}$ linealmente dependientes, el rango

$$rango \begin{pmatrix} x - x_0 & v_1 \\ y - y_0 & v_2 \\ z - z_0 & v_3 \end{pmatrix} = 1.$$

EJERCICIOS

Ejercicio 2.5

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1,2,-3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (3,0,-2)$.
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1,2,-3)$ y $B(3,-6,-2)$.

Ejercicio 2.6 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1,2,3)$ y es paralela al eje OX.

Ejercicio 2.7 Halla las ecuación de la recta que pasa por el punto $A(4,-2,3)$ y es paralela a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{6}$.

Ejercicio 2.8 Dada la recta r de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 10\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$.

a) Determina las ecuaciones implícitas de r.
b) Averigua si los puntos $A(0,-1,1)$ y $B(-3,2,-5)$ pertenecen o no a la recta.

Ejercicio 2.9 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r de ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

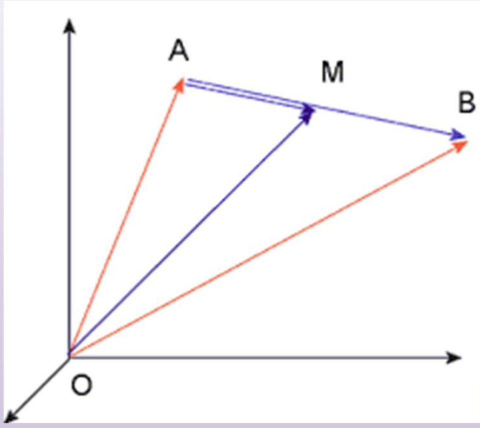
SEGMENTO DE RECTA

Sean A y B dos puntos del espacio. Variando el valor de λ en el intervalo cerrado $[0,1]$, obtenemos cualquier punto P del segmento AB: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$

Variando el valor de λ en el intervalo cerrado $[0,1]$, obtenemos todos los puntos del segmento AB. El valor $\lambda = 0$ da lugar al punto A; y cuando $\lambda = 1$, el punto alcanzado es B.

El ***punto medio*** M del segmento AB se calcula tomando $\lambda = 1/2$:

$$M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad \frac{z_0 + z_1}{2}\right).$$



Si hacemos que λ tome los valores $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$, determinamos los $n-1$ puntos que dividen al segmento AB en n partes iguales.

EJERCICIOS

Ejercicio 2.10

a) Determina las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(1,2,4)$ y $B(4,3,2)$.

b) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

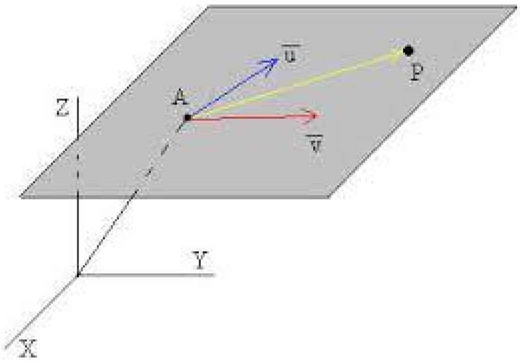
2.2.2 ECUACIONES DE UN PLANO

Sea π el plano que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y está generado por los vectores direccionales $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Necesariamente $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano π. Entonces, podemos escribir

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{v} + \mu\,\vec{w},$$

para ciertos valores reales λ y μ.



En coordenadas, esta expresión nos proporciona la ***ecuación vectorial:***

$$\pi \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3).$$

Igualando cada componente llegamos a las ***ecuaciones paramétricas***:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + \mu w_1. \\ y = y_0 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

Obsérvese que, ya que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, el rango

$$rango\begin{pmatrix} x - x_0 & v_1 & w_1 \\ y - y_0 & v_2 & w_2 \\ z - z_0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Equivalentemente, el determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & v_1 & w_1 \\ y - y_0 & v_2 & w_2 \\ z - z_0 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante obtenemos la ***ecuación general:***

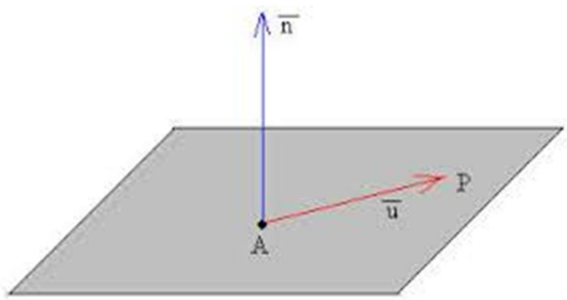
$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

De aquí se deduce que el vector $\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, o cualquier otro vector paralelo al plano, satisface

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Dicho de otra forma, el vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ es perpendicular al plano ya que el producto escalar

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$



EJERCICIOS

Ejercicio 2.11

Halla las ecuaciones del plano en cada caso:

a) El plano que pasa por el punto $A(2, -4,3)$ y tiene vectores direccionales $\vec{v} = (1, -1,2)$ y $\vec{w} = (3,1, -3)$.

b) El plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(3,2,0)$ y $(0,1,2)$.

Ejercicio 2.12 Encuentra un punto y dos vectores del plano $x - 3y + 2z + 5 = 0$.

Ejercicio 2.13 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,1,3)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = (2,3, -4)$.

Ejercicio 2.14 Halla la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = y - 3 = z$ y pasa por el punto $A(-1,2, -3)$.

Ejercicio 2.15 Halla las ecuaciones paramétricas y general del plano que contiene al punto $(2,0,-1)$ y a la recta de ecuación $(x,y,z)=(1-3\lambda,-4+2\lambda,2+\lambda)$.

Ejercicio 2.16 Estudia la posición relativa de las rectas $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$ y $(x,y,z)=(4+\lambda,2-\lambda,-1+2\lambda)$. Si se cortan, halla el punto de corte y las ecuaciones paramétricas y general del plano que determinan.

Ejercicio 2.17 Halla la ecuación del plano que contiene al punto $A(3,4,-1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $B(1,-1,1)$ y $C(3,-5,3)$.

Ejercicio 2.18 Dado el plano $\pi\equiv 2x-y+z+1=0$, la recta $s\equiv x=y=\frac{z+1}{3}$ y el punto $A(4,0,-1)$. Halla el plano que pasa por A, es paralelo a la recta s y es perpendicular al plano π.

Ejercicio 2.19 Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0,1,5)$ y $B(3,4,3)$ y es paralelo a la recta $x-2=\frac{y}{3}=z+1$.

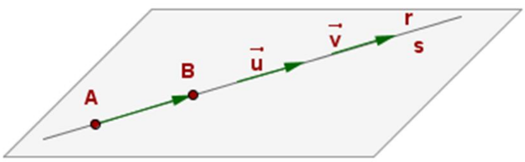
Ejercicio 2.20 Determina el plano que pasa por $A(1,-3,-3)$ y $B(-2,4,-4)$ y es perpendicular al plano de ecuación general $6x+5y+4z-2=0$.

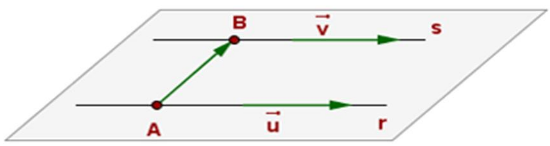
2.3 POSICIONES RELATIVAS

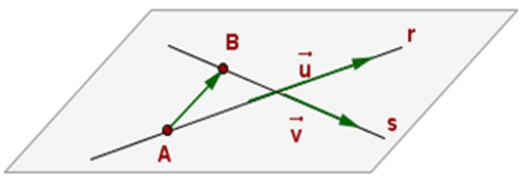
2.3.1 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

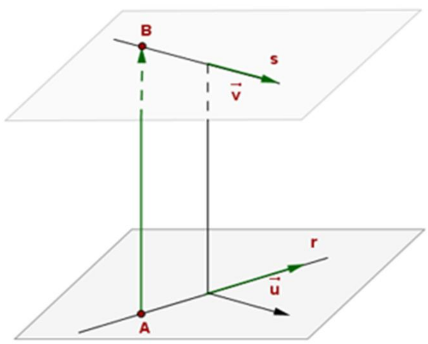
Sea r la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v}_r=\vec{u}$, y sea s la recta que pasa por B con dirección $\vec{v}_s=\vec{v}$. Las posiciones que pueden adoptar r y s son:

Rectas r y s	coinciden	paralelas	se cortan	se cruzan
$rango(\vec{v}_r,\vec{v}_s)$	1	1	2	2
$rango(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB})$	1	2	2	3









EJERCICIOS

Ejercicio 2.21 Estudia la posición relativa de las rectas:

$$(x,y,z)=(4,-2,3)+\lambda(1,-1,2) \text{ y } \frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{2}.$$

Ejercicio 2.22 Determina el valor de m para que las rectas r y s se corten en un punto y halla las coordenadas del punto de corte: $r\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{2}$ y $s\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-m}{1}$.

ALTERNATIVA. Podemos estudiar la posición relativa de dos rectas a partir de sus ecuaciones implícitas:

$$r\equiv\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases},\quad s\equiv\begin{cases}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\\a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{cases}$$

Para ello, estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas, considerando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\\a_4&b_4&c_4\end{pmatrix},\qquad A^*=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&-d_1\\a_2&b_2&c_2&-d_2\\a_3&b_3&c_3&-d_3\\a_4&b_4&c_4&-d_4\end{pmatrix}.$$

- Si $rango(A)=2$ y $rango(A^*)=2$, el sistema es compatible indeterminado. Las rectas **son coincidentes.**
- Si $rango(A)=2$ y $rango(A^*)=3$, el sistema es incompatible. Como los vectores directores son proporcionales, las rectas son **paralelas**.
- Si $rango(A)=3$ y $rango(A^*)=3$, el sistema es compatible determinado. Esto quiere decir que las **rectas son secantes,** dando lugar a un único punto intersección.
- Si $rango(A)=3$ y $rango(A^*)=4$, el sistema es incompatible. Los vectores directores no son proporcionales y las rectas **se cruzan** en el espacio.

EJERCICIOS

Ejercicio 2.23 Determina la posición relativa de las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+y-z+2=0\\2x+3y-z+1=0\end{cases},\quad s\equiv\begin{cases}-x+2y-2z+2=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

2.3.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Consideremos dos planos π_1 y π_2 expresados mediante sus ecuaciones generales:

$$\begin{cases}\pi_1\equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\\pi_2\equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}.$$

Sean A y A^*, respectivamente, las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

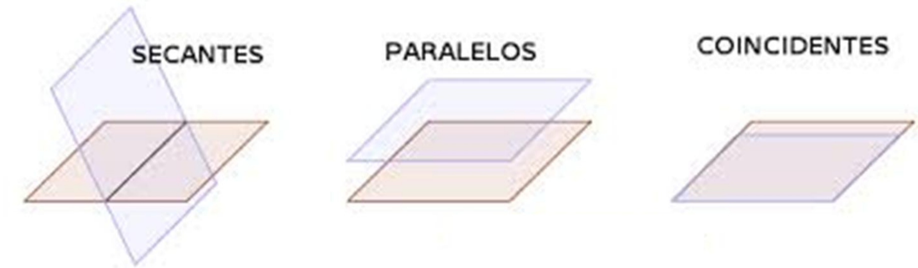
$$A^*=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&-d_1\\a_2&b_2&c_2&-d_2\end{pmatrix}$$

Según el teorema de Roché-Frobenius se pueden presentar distintas situaciones que podemos interpretar geométricamente. Pueden aparecer los siguientes casos:

Caso 1. Si $rango(A) = 1$ y $rango(A^*) = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son dependientes y, consecuentemente, los ***planos son coincidentes*.**

Caso 2. Si $rango(A) = 1$ y $rango(A^*) = 2$, el sistema es incompatible y, por tanto, los ***planos son paralelos***.

Caso 3. Si $rango(A) = 2$ y $rango(A^*) = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son independientes (vectores normales independientes). Esto quiere decir que los ***planos son secantes*,** dando lugar a una recta.



EJERCICIOS

Ejercicio 2.24 Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas siguientes:

a) $3x - y + 2z - 1 = 0$ y $-6x + 2y - 4z + 5 = 0$.
b) $x - 2y + 3z + 2 = 0$ y $-3x + 6y - 9z - 6 = 0$.
c) $3x - y + 2z - 1 = 0$ y $x + y - 3z + 4 = 0$.

Ejercicio 2.25 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta definida por la intersección de los planos $3x - y + 2z = 0$ y $x + y - 3z + 4 = 0$.

Ejercicio 2.26 Halla la ecuación del plano que pasa por $A(2, -3, 4)$ y es paralelo al plano de ecuación general $x - 3y + z - 2 = 0$.

Ejercicio 2.27 Determina m y n para que los planos $x - my + 2z + 9 = 0$ y $3x - 3y + nz - n = 0$ sean paralelos.

HAZ DE PLANOS

El **haz de planos** a una recta r es el conjunto de todos los planos que contienen a dicha recta.
Si expresamos la recta como la intersección de dos planos

$$r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases},$$

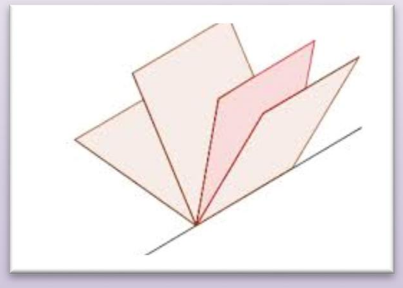
cualquier otro plano π que contenga a r tiene por ecuación general:

$$\mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

para ciertos valores $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $(\mu, \lambda) \neq (0,0)$. En la práctica, consideraremos que la ecuación del haz es:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

que describe a todos los planos del haz excepto a $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ y tiene la ventaja de emplear un único coeficiente.



El haz de planos facilita la resolución de algunos problemas, aunque admitan también otros métodos de resolución. Particularmente resulta interesante para hallar la ecuación de un plano del que sabemos que contiene a una recta dada por sus ecuaciones implícitas.

EJERCICIOS

Ejercicio 2.28 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z+1}{2}$ y pasa por $(1,2,-3)$.

Ejercicio 2.29 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 9 = 0 \\ 3x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$, y pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 2.30 Determina el plano que contiene a la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 9 = 0 \\ 3x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$, y es perpendicular al plano $x - y + 2z - 1 = 0$.

2.3.3 POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

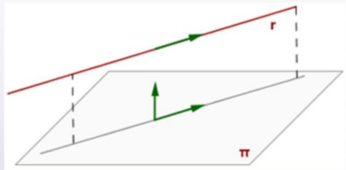
Consideremos una recta r y un plano π expresados mediante:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

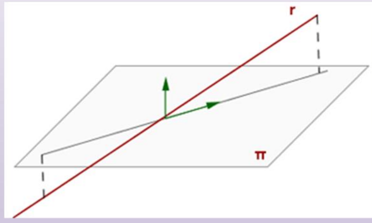
Sean A y A^*, respectivamente, las matrices de coeficientes y ampliada del sistema asociado.

Caso 1. Si $rango(A) = 2$ y $rango(A^*) = 2$,
el sistema es compatible indeterminado.
La recta está ***contenida*** en el plano**.**

Caso 2. Si $rango(A) = 2$ y $rango(A^*) = 3$,
el sistema es incompatible y, por tanto,
la recta es ***paralela*** al plano**.**



Caso 3. Si $rango(A) = 3\ y\ rango(A^*) = 3$,
el sistema es compatible determinado.
Esto quiere decir que la recta y el plano son ***secantes***,
dando lugar a un punto.



NOTA. En los dos primeros casos, el vector director de la recta $\vec{v}$ y el vector normal al plano $\vec{n}$ son ortogonales: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. En el caso 3, tenemos $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$.

EJERCICIOS ____

Ejercicio 2.31 Estudiar la posición relativa de la recta $(x, y, z) = (-1 + 3\lambda, 2 + \lambda, 2\lambda)$ y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2), B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$. Si se cortan, halla el punto de corte.

Ejercicio 2.32 Determina la posición relativa de la recta $\frac{x}{6} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-a}{4}$ y el plano $ax + 2y - 6z + 7 = 0$ para los diferentes valores de a. Halla el punto de corte de la recta y el plano para $a = 5$.

____

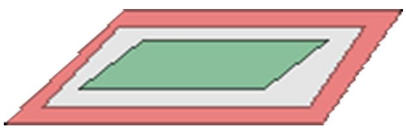
2.3.4 POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Consideremos tres planos $\pi_1, \pi_2\ y\ \ \pi_3$ expresados mediante sus ecuaciones generales:

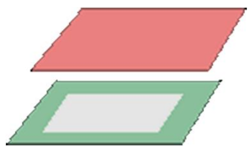
$$\begin{cases} \pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Sean A y A^*, respectivamente, las matrices de coeficientes y ampliada del sistema asociado. Según el teorema de Roché-Frobenius se pueden presentar los siguientes casos:

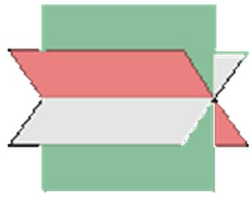
Caso 1. Si $rango(A) = 1$ y $rango(A^*) = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son dependientes y, por tanto, los tres ***planos son coincidentes.***



Caso 2. Si $rango(A) = 1$ y $rango(A^*) = 2$, el sistema es incompatible. Los ***tres planos son paralelos,*** o bien ***dos son coincidentes y el tercero paralelo*** a ellos.



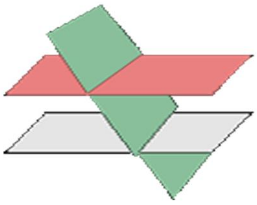
Caso 3. Si $rango(A) = 2$ y $rango(A^*) = 2$, el sistema es compatible indeterminado. El sistema posee infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Estas soluciones constituyen las ecuaciones paramétricas de ***una recta***. Esta recta es el eje de un haz de planos.



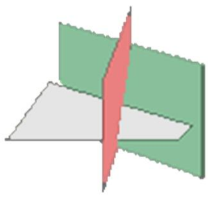
Caso 4. Si $rango(A) = 2$ y $rango(A^*) = 3$, el sistema es incompatible. Los planos no tienen puntos en común. Tenemos dos casos:

a) ***Dos planos son paralelos y están cortados por un tercero***.

b) Los planos son ***secantes dos a dos.***



Caso 5. Si $rango(A) = 3$ y $rango(A^*) = 3$, el sistema es compatible determinado. Los tres planos ***se cortan en un punto***.



EJERCICIOS

Ejercicio 2.33 Estudia la posición relativa, según los valores del parámetro m, de:

a) Los planos $mx + y + z = 1, x + my + z = 1$ y $x + y + mz = 1$.

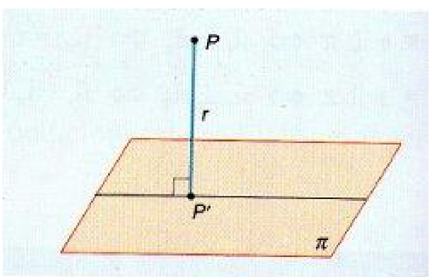
b) Los planos $x + y + z = 2$, $2x + 3y + z = 3$ y $mx + 10y + 4z = 11$.

2.4 Algunos problemas de perpendicularidad, paralelismo y simetría.

La variedad de problemas es muy amplia y muchos problemas admiten más de una forma de resolución. El objetivo de este apartado es mostrar algunos ejemplos que puedan ser resueltos aplicando técnicas sencillas e intuitivas.

EJERCICIOS

Ejercicio 2.34 [Proyección de un punto sobre un plano] Calcula la proyección del punto $P(1,1,4)$ sobre el plano $\pi \equiv x + z = 0$.



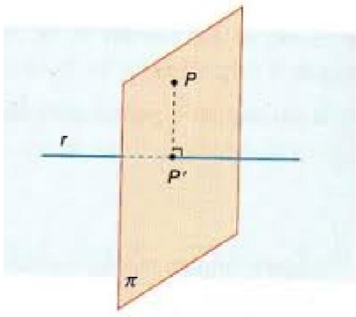
PROCEDIMIENTO

1. Calculamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

2. Cortamos la recta obtenida con el plano.

3. El punto de corte obtenido, es la proyección P' del punto P sobre el plano π.

Ejercicio 2.35 [Proyección de un punto sobre una recta] Calcula la proyección del punto $P(1,1,4)$ sobre el plano $r \equiv x = y + 2 = \frac{z+1}{-2}$.

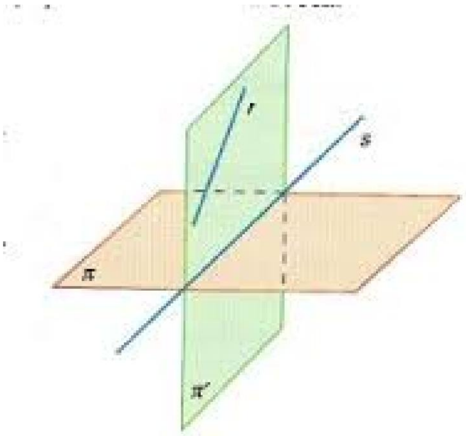


PROCEDIMIENTO

1. Calculamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por P.

2. Cortamos recta y plano. El punto obtenido P', es la proyección del punto P sobre la recta r.

Ejercicio 2.36 [Proyección de una recta sobre un plano] Calcula la proyección de la recta $r \equiv x = y + 2 = \frac{z-1}{2}$ sobre el plano $\pi \equiv y = 0$.



PROCEDIMIENTO

Forma 1.

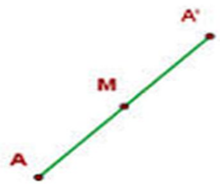
Cogemos dos puntos de la recta P y Q y hacemos la proyección de estos sobre el plano, obteniendo así dos puntos en el plano P' y Q'. La recta que une estos puntos es la proyección de la recta r sobre el plano π.

Forma 2.

Calculamos el plano π' perpendicular a π y que contiene a r La recta s que se obtiene al cortar los planos π y π', es la provección de r sobre π.

Ejercicio 2.37 [Punto simétrico con respecto a un punto]

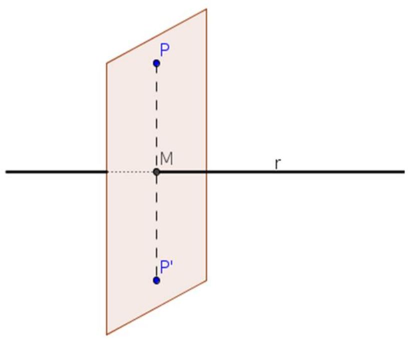
Halla el punto simétrico de $A(4,3,-1)$ con respecto a $M(2,4,-3)$.



PROCEDIMIENTO

Calculamos el punto simétrico A' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento AA'.

Ejercicio 2.38 [Punto simétrico con respecto a una recta] Halla el simétrico de $P(2,0,3)$ respecto la recta $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$.



PROCEDIMIENTO

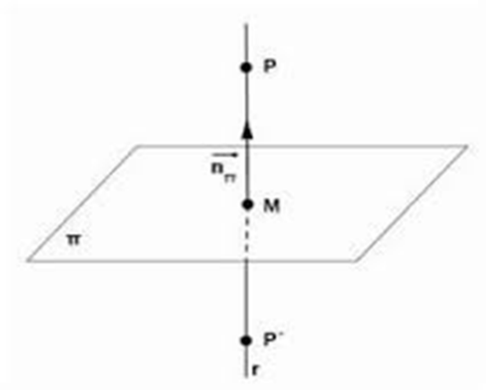
1. Hallamos el plano π perpendicular a r y que contiene al punto P.

2. Hallamos la intersección del plano π con r para obtener el punto M proyección del punto P sobre la recta r.

3. Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento PP'.

Ejercicio 2.39 [Punto simétrico con respecto a un plano]

Halla el punto simétrico de $P(0,1,4)$ respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 3z + 4 = 0$.



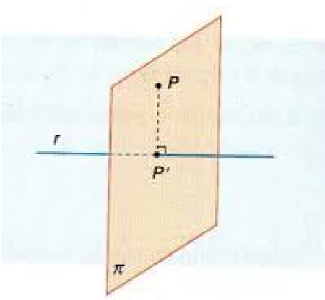
PROCEDIMIENTO

1. Hallamos la recta r que es perpendicular a π y que contiene al punto P.

2. Hallamos la intersección de la recta r con π para obtener el punto M proyección del punto P sobre el plano π.

3. Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento PP'.

Ejercicio 2.40 [Recta que pasa por un punto y corta perpendicularmente a otra] Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y corta perpendicularmente a $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.



PROCEDIMIENTO

1. Hallamos la proyección P' del punto P sobre de r.

2. La recta que pasa por los puntos P y P' es la solución buscada.

Ejercicio 2.41 [Perpendicular común a dos rectas que se cruzan] Halla la recta perpendicular común a las rectas $r_1 \equiv x = y = z$ y $r_2 \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$.

PROCEDIMIENTO

1. Calculamos el producto vectorial $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$ de los vectores directores de r y s.

2. Hallamos el plano π_r que contiene a la recta r y al vector $\vec{w}$.

3. Hallamos el plano π_s que contiene a la recta s y al vector $\vec{w}$.

4. La recta definida por el corte de ambos planos es la perpendicular común buscada.

Nota: *Si las rectas se cortan, también podemos calcular la perpendicular común siguiendo estos pasos, aunque bastaría con hacer la recta que lleva como dirección el producto vectorial de los vectores directores y que pasa por el punto de corte de las rectas.*

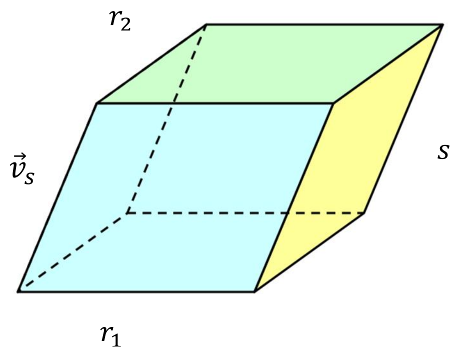
Ejercicio 2.42 [Recta que se apoya en dos y es paralela a una dada] Halla la ecuación de la recta que corta a las rectas

$$r_1 \equiv x - 1 = y = z, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z = 3 \end{cases},$$

y es paralela a la recta s de dirección $\vec{v}_s = (-2,3,-1)$.

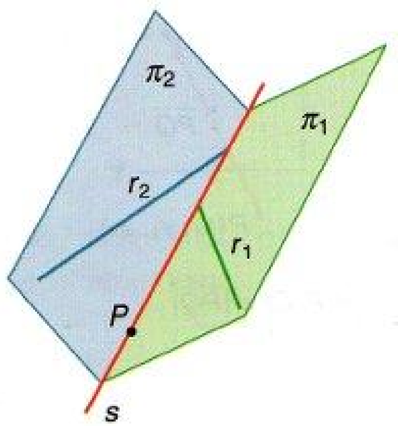
PROCEDIMIENTO

1. Calculamos el plano π_1 que contiene a r_1 y es paralelo a la recta s.
2. Calculamos el plano π_2 que contiene a r_2 y es paralelo a la recta s.
3. La recta definida por la intersección de ambos planos es la solución buscada.



Ejercicio 2.43 [Recta que se apoya en otras dos y pasa por un punto] Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 3\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}.$$



La recta s se apoya en r_1 y en r_2 y pasa por el punto P.

PROCEDIMIENTO

1. Calculamos el plano π_1 que contiene a r_1 y al punto P.
2. Calculamos el plano π_2 que contiene a r_2 y al punto P.
3. La recta s definida por el corte de ambos planos es la solución buscada.
