

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS

1 Hallar la potencia n-ésima de las matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Comprobar si la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica la ecuación $2X^2 + 3X + 5 = 0$.

3 Determinar las matrices A y B sabiendo que:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

4 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX + 2B - C = D$.

b) $(B + C)X - A = D$.

c) $4AX - B - 2D = C$.

5 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resuelve matricialmente la ecuación:

$$ABX - CX = 2C$$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & x & 0 \\ -x & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 6 & 2x & -2x \\ 4 & -2 & 6 \\ 2x+10 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

7 Calcula los valores del parámetro m para los que las siguientes matrices no tienen inversa:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} m & 5 & 2 \\ -8 & 9 & -4 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & m & -6 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & m & -8 \\ m & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

8 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1$$

y utilizando las propiedades de los determinantes, calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{pmatrix}$$

9 Sea A una matriz cuadrada. Dar un criterio, en función del determinante de A , para decidir si A tiene inversa o no. En caso de que A tenga inversa, dar una fórmula que proporcione A^{-1} .

Comprobar que la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a y calcularla.

10 Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 8 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11 Obtener el valor de k para que el rango de la matriz A siguiente sea igual a 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

12 Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

13 Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

para los distintos valores de a .

14 Calcular los valores de a para los que tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y calcular dicha matriz para $a=0$

15 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$$

y utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcular los siguientes:

$$\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$$

16 Decir si los siguientes sistemas son de Cramer, y en caso afirmativo resolverlos utilizando la regla de Cramer.

$$a) \begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y + 3z = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 12x + 4y - 8z = 10 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 4 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y - z = 5 \\ z = 0 \end{cases}$$

17 Discutir, según los valores del parámetro m , los siguientes sistemas de ecuaciones. Resolverlos cuando sea posible.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + 3z = m \end{cases} \quad d) \begin{cases} mx + 3y = 0 \\ mx + my + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = m \\ 2x - 5y + mz = -2 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ mx - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

18 Unos grandes almacenes realizan el mismo pedido a tres proveedores distintos A , B y C . El pedido consta de bebidas, cereales y congelados (expresados en kilogramos). Cada proveedor fija sus precios conforme a la normativa vigente, reflejada en la siguiente tabla:

	Bebidas	Cereales	Congelados
Proveedor A	2 000	3 500	2 000
Proveedor B	1 000	4 000	3 500
Proveedor C	4 000	3 000	2 000

El pedido del proveedor A está valorado en 1 600 000 PTA, el de B en 50 000 PTA más que el anterior y el de C en 50 000 más que el último.

- Plantear el problema en términos de un sistema de ecuaciones.
- Determinar la composición del pedido.
- Clasificar el sistema de ecuaciones del apartado a).

19 Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$$

determinar el valor del parámetro a para que:

- No tenga ninguna solución.
- Tenga infinitas soluciones.
- Tenga una única solución.
- Tenga una solución en la que $x = 3$.

20 Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y la tercera de sajones. Promete al asaltar una plaza una recompensa de 901 escudos, con la condición de que cada soldado de la compañía que primero suba recibirá un un escudo, repartiéndose los demás a partes iguales entre los restantes. Si suben primero los suizos, los otros soldados reciben medio escudo, si son los zuavos, los otros un tercio, y si son los sajones, los demás reciben un cuarto. ¿Cuántos hombres tenía cada compañía?