ESQUEMAS BLOQUE ÁLGEBRA LINEAL

IDEAS FUNDAMENTALES

- **Definición de matriz** → – Una matriz de orden $m \times n$ no es más que un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas.

- **Igualdad de matrices** → – Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y coinciden elemento a elemento.

- **Operaciones con matrices**
  - Suma → – Dadas dos matrices del mismo orden, se define la suma (diferencia) de A y B como otra matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen sumando (restando) los elementos de ambas matrices.
  - Producto por un escalar → – Dada una matriz A de orden mxn y dado un escalar l, se define el producto de l por A, como la matriz, que denotaremos por lA, cuyo orden es el de A y cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de A por el escalar l.
  - Producto → – Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de órdenes $m \times n$ y $n \times q$ respectivamente, se define su producto $AB = (c_{ij})$ como otra matriz de orden $m \times q$ donde los c_{ij} se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de A por el elemento correspondiente de la columna j de B y sumando los productos obtenidos.

- **Matriz traspuesta**
  - Definición → – Dada una matriz A de orden $m \times n$, llamaremos matriz traspuesta de A, que denotaremos por A^t a otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.
  - Propiedades
    - $(A^t)^t = A$
    - $(A + B)^t = A^t + B^t$
    - $(AB)^t = B^t A^t$
    - $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

- **Matriz inversa** → – Dada una matriz cuadrada de orden nA, se llama matriz inversa de A, que denotamos por A^{-1}, a otra matriz del mismo orden que verifica:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- **Definición de determinante**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- **Desarrollo de un determinante por adjuntos** → – El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

- **Método de Gauss** → – El método de Gauss para calcular determinantes consiste en transformar la matriz de partida en otra equivalente, mediante transformaciones elementales, que sea triangular superior (o inferior), ya que en este caso, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

- **Propiedades de los determinantes**
  - $det\,(A) = det\,(A^t)$
  - Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz por un cierto número k, el determinante queda multiplicado por dicho número.
  - $det\,(A \cdot B) = det\,(A) \cdot det\,(B)$
  - Si intercambiamos dos filas o dos columnas de una matriz, el determinante cambia de signo.
  - Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz son nulos, el determinante es cero.
  - Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces su determinante es nulo.
  - Si dos filas o columnas son proporcionales, el determinante es nulo.
  - Si una fila o columna de una matriz es combinación lineal de otra, el determinante es nulo.
  - Si a una fila o columna de una matriz le sumamos otra, el determinante permanece invariante.
  - Si a una fila o columna de una matriz le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante permanece invariante.

- **Matriz inversa**
  - $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(A^*)^t$ si $|A| \neq 0$
  - Propiedades
    - La inversa de una matriz, en caso de existir, es única.
    - La inversa de la inversa coincide con la matriz de partida:

      $$(A^{-1})^{-1} = A$$
    - La inversa del producto de dos matrices coincide con el producto de las inversas pero en orden inverso. Esto es:

      $$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- **Definición**
  - Se llama sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto formado por m ecuaciones lineales en las que intervienen n variables. Su forma general es:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = c_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = c_m \end{cases}$$

- **Solución de un sistema**
  - Se llama solución del sistema a un conjunto de números reales $\{s_1, \dots, s_n\}$ de manera que al hacer $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ se verifican, simultáneamente, todas las ecuaciones del sistema.

- **Clasificación de los sistemas de ecuaciones**
  - Según el tipo de ecuaciones
    - Lineales
    - No lineales
  - Según los términos independientes
    - Homogéneos
    - No homogéneos
  - Según el número de soluciones
    - Compatibles
      - Determinados
      - Indeterminados
    - Incompatibles

- **Sistemas equivalentes**
  - Dos sistemas de ecuaciones, con las mismas incógnitas, se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones.

- **Discusión de un sistema**
  - Teorema de Rouché-Fröbenius
    - Si $rg(A) = rg(A^*) = n$, el sistema es compatible determinado
    - Si $rg(A) = rg(A^*) < n$, el sistema es compatible indeterminado
    - Si $rg(A) \neq rg(A^*)$, el sistema es incompatible

- **Métodos de resolución**
  - Método de Gauss
  - Regla de Cramer
  - Matricialmente